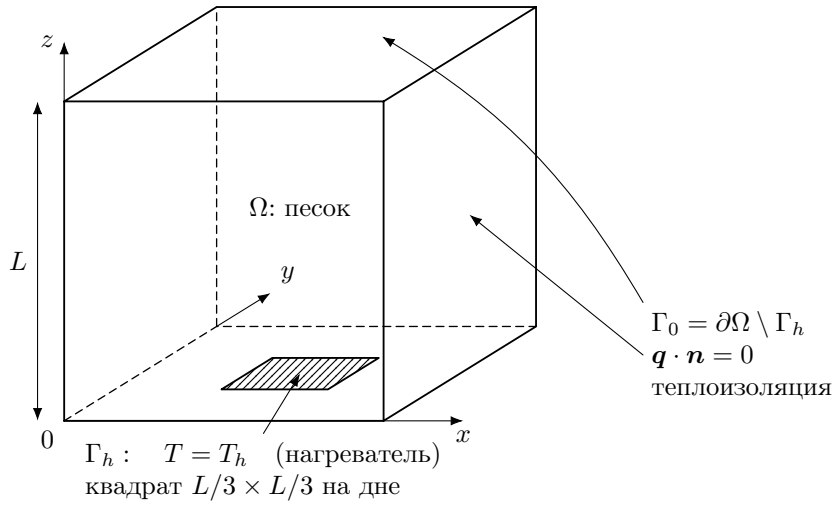
Куб с локальным нагревом

Простая трёхмерная модель теплопроводности

Однородный неподвижный песок занимает куб со стороной L. На центральном квадрате дна поддерживается температура $T_h > T_0$; остальная граница теплоизолирована. Оболочка, включения и внутренние источники тепла отсутствуют. Стенки представлены границами без толщины.



Куб показан прозрачным; штриховка отмечает нагреватель. Теплоизолированы все остальные участки, включая остаток дна.

Область и участки границы. Ось z направлена вверх:

$$\Omega = (0, L)^3, \qquad \Gamma_h = \left\{ (x, y, 0) : \ \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}, \quad \frac{L}{3} < y < \frac{2L}{3} \right\}, \qquad \Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_h.$$

Начально-краевая задача. Найти $T = T(x, y, z, t)$ при $t > 0$:

$$\begin{cases} C \dfrac{\partial T}{\partial t} = k \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ T = T_h, & \boldsymbol{x} \in \Gamma_h, \quad t > 0, \\ -k \nabla T \cdot \boldsymbol{n} = 0, & \boldsymbol{x} \in \Gamma_0, \quad t > 0, \\ T(\boldsymbol{x}, 0) = T_0, & \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $k > 0$ — эффективная теплопроводность песка, Вт/(м·К); $C = \rho c > 0$ — объёмная теплоёмкость, Дж/(м^3·К); $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль; $\boldsymbol{q} = -k \nabla T$ — плотность теплового потока, Вт/м^2. Коэффициенты k, C постоянны. Для примера можно задать $T_0 = 20\,^\circ$C, $T_h = 50\,^\circ$C; L, k, C остаются параметрами.

Что изучаем. Локальный нагрев создаёт зависимость от всех трёх координат. Ищем температурное поле, изотермы и время прогрева. Начальный скачок температуры нагревателя задаёт идеальное включение в момент $t = 0$; начальное условие относится к внутренности куба. При $t \to \infty$ температура во всём кубе стремится к T_h.